

## MEDIDAS DE DISPERSIÓN CON GEOMETRIA DINÁMICA

José Alexandre Martins<sup>1</sup>, Assumpta Estrada Roca<sup>2</sup>, Maria Manuel Nascimento<sup>3</sup>, Carles Comas<sup>4</sup>

<sup>1</sup> UDI-IPG, Instituto Politécnico da Guarda, Guarda, Portugal, jasvm@ipg.pt

<sup>2</sup> Universitat de Lleida, Lleida, España, aestrada@matematica.udl.cat

<sup>3</sup> CM-UTAD, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real, Portugal, mmsn@utad.pt

<sup>4</sup> Universitat de Lleida, Lleida, España, carles.comas@matematica.udl.cat

### RESUMEN

Dado que las medidas de dispersión son cruciales en la enseñanza de la Estadística, presentamos algunas aplicaciones dinámicas utilizables para su exploración de esos conceptos en las clases.

En la primera parte de este trabajo resaltamos la importancia de utilizar la visualización como estímulo para introducir y explorar la variación estadística usando la tecnología actual disponible. Además, al mejorar la motivación de los alumnos en clase, se subsanan dificultades y errores relacionados con su interpretación y comprensión.

Con la ayuda del software de geometría dinámica (SGD), Cabri-Géomètre II Plus, se presentan tres aplicaciones, que desde un punto de vista didáctico permiten visualmente estimular, motivar y facilitar la familiarización con los conceptos estadísticos de dispersión.

Las aplicaciones presentadas podrán ser implementadas por cualquier profesor con conocimientos básicos de Cabri-Géomètre u otro software de geometría dinámica. Esperamos que su utilización permita una mayor interacción en las clases de estadística y en especial las relacionadas con las medidas de dispersión.

**Keywords:** Educación, Estadística, dispersión, visualización, simulación, SGD.

### 1. INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la Estadística es un tema actual que requiere innovaciones y cambios en las formas tradicionales de formación, producción y comunicación de la información. Según (Darius, Michiels y Raeymaekers, 2002, p.1) con el uso de herramientas tecnológicas surgen nuevas posibilidades de enseñanza, con las cuales es posible proporcionar a los alumnos una experiencia diferente, que permita un aprendizaje más eficiente y eficaz.

La Estadística es una parte de la Matemática donde es posible desarrollar la visualización dinámica de muchos conceptos (Martins y Nascimento, 2009). Además si tenemos en cuenta las enormes potencialidades de la exploración gráfica y visual del entorno tecnológico actual, es natural considerar la visualización como un aspecto extraordinariamente importante tanto en la construcción y la transmisión de conceptos, como en el descubrimiento de nuevas relaciones, Guzmán (2001). Evidentemente la visualización es una componente más en la continua tentativa de mejorar la enseñanza de la estadística, siendo necesaria una gran labor de reflexión e investigación para adecuarla a la enseñanza de conceptos específicos.

Con este trabajo se pretende por un lado, presentar una respuesta dinámica y visual al aprendizaje de las medidas de dispersión a través de la utilización del software de geometría dinámica Cabri Géomètre II Plus y por otro facilitar el trabajo a los profesores, mostrando ideas y caminos que puedan contribuir a la mejora de la calidad de la enseñanza de la estadística a través de la utilización de recursos tecnológicos adecuados.

En ese sentido, con la ayuda fundamental de Cabri, se presentan unas aplicaciones, que pretenden visualmente estimular, motivar y facilitar la interiorización de los conceptos de varianza así como algunas de sus propiedades, y que además ayudan a reforzar el trabajo cooperativo gracias a su componente lúdica, tan importante hoy en día para nuestros estudiantes más jóvenes.

## 2. MEDIDAS DE DISPERSIÓN

A pesar de la importancia de la variación estadística, su tratamiento en los programas escolares se reduce a dar una pequeña interpretación basada en la búsqueda de una medida que indique la dispersión de los datos (Barros & Fernandes, 2001, y Estepa & Pino, 2013); después de lo cual se procede a deducir las fórmulas correspondientes: desviación media, varianza y desviación estándar. El problema es que al aplicar la fórmula para encontrar el valor de la varianza o desviación estándar, no se refleja en modo alguno el concepto de variación. Algunas de las explicaciones para esta situación sugeridas por Shaughnessy (1997) son:

- El cálculo e interpretación no son muy fáciles.
- La carencia de modelos didácticos para dar significado a las medidas de variación, a diferencia de modelos que sirven para motivar los conceptos de medidas centrales (balanza, punto de equilibrio, etc.).

Por todo esto, deberíamos considerar a la variación estadística como un concepto central de la investigación científica y nos debe llevar a una reflexión profunda sobre el papel que debe jugar esta noción en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. El concepto de variación debe ser revalorado y utilizado en los programas de estadística y además el maestro debe prepararse para este cambio.

En esta línea, se presentan a continuación en el entorno Cabri diferentes experiencias o actividades sobre la relación entre las frecuencias y el valor de la varianza, la representación gráfica del concepto de varianza y la idea de varianza como una media.

### 2.1. Varianza y frecuencia

En primer lugar se pretende, para el caso de las variables continuas, relacionar el histograma con el valor de la varianza y ver su evolución. Para ello se construye un histograma en el que es posible alterar dinámicamente las frecuencias y se puede comprobar, por el área del círculo asociado, el valor de la varianza correspondiente.

Así, se pueden explorar distintas variaciones en las frecuencias y observar lo que sucede (Figura 1). En particular, tiene interés experimentar situaciones con medias semejantes ó con diferentes asimetrías y varianzas muy distintas.

Con estos experimentos es posible entender la complejidad e interdependencia que encierra el concepto de varianza, y además estimular la intuición y la capacidad crítica de los alumnos respecto a la dispersión y sus medidas estadísticas.

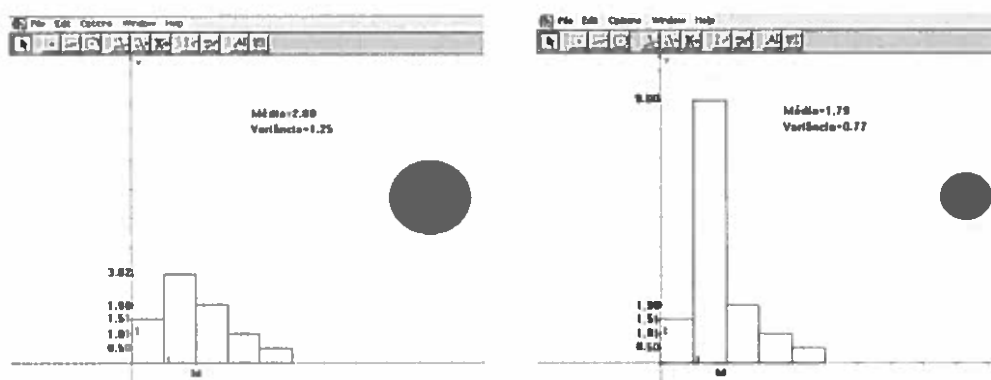


Figure 1: Varianza y frecuencia

### 2.2. Representación gráfica de la varianza

En la siguiente aplicación se pretende, visualizar, a través de cuadrados (con sus áreas y las medidas de sus lados), el valor de la varianza y su evolución. Para una variable discreta (con 5 valores). Para ello se parte de la fórmula de la varianza:

$$\sigma^2 = \sum_k (x_k - \bar{x})^2 / n$$

En contexto geométrico, la varianza surge como la media aritmética de las áreas de los cuadrados que tienen sus lados iguales a la distancia entre cada uno de los datos y la media aritmética correspondiente.

Basándonos en esta interpretación geométrica, la aplicación representa, Figura 2, a la izquierda de la media de los datos y para cada uno de los datos de valor inferior a la media, los cuadrados que tienen la medida de sus lados iguales a la distancia entre la media aritmética y cada uno de los datos con valor inferior a la media. Lo mismo pasa para los datos superiores a la media, pero en este caso están situados a la derecha de la misma. Finalmente se presenta un cuadrado de área igual a la media de las áreas de los cuadrados referidos y que tiene la medida del lado igual al valor del desvío padrón.

Con esta aplicación se puede visualizar el contenido geométrico del concepto de varianza evidenciando que es muy sensible a variaciones de los datos y que su valor depende mucho la dimensión de estos valores.

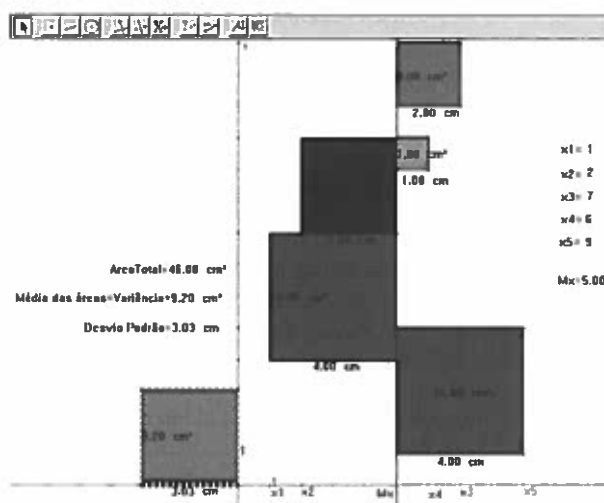


Figura 2: Representación gráfica de la varianza

### 2.3. La varianza como una media

En este punto, se pretende visualizar el valor de la varianza y su evolución, para variables discretas partiendo de la idea en la que se la considera como la media aritmética del cuadrado de las diferencias entre los valores de los datos y la media aritmética de esos datos.

Para eso se recuerda aquí la propiedad de la media aritmética de que, la suma de las diferencias entre los valores de los datos y la media es cero, ó sea,

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0.$$

Entonces, considerando  $y_i = (x_i - \bar{x})^2, i = 1, \dots, n$  una nueva serie de datos, se puede afirmar que la varianza de los datos  $x_i$ 's es igual a la media de los datos  $y_i$ 's, ó sea,

$$\sigma^2 = \frac{\sum_k (x_k - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_k y_k}{n} = \bar{y}$$

y, por consiguiente,

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \sigma^2) = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}) = 0.$$

Así, tal como se puede observar en la Figura 3, en que  $y_i = (V_i)^2$  y en que  $\sigma^2 = V$  solo cuando  $V_{\text{somav}}=0$ , con esta aplicación de Cabri Géomètre se experimenta, en simultáneo, la obtención de la media y de la varianza de los datos, usando la misma propiedad de la media para las dos series de datos relacionadas.

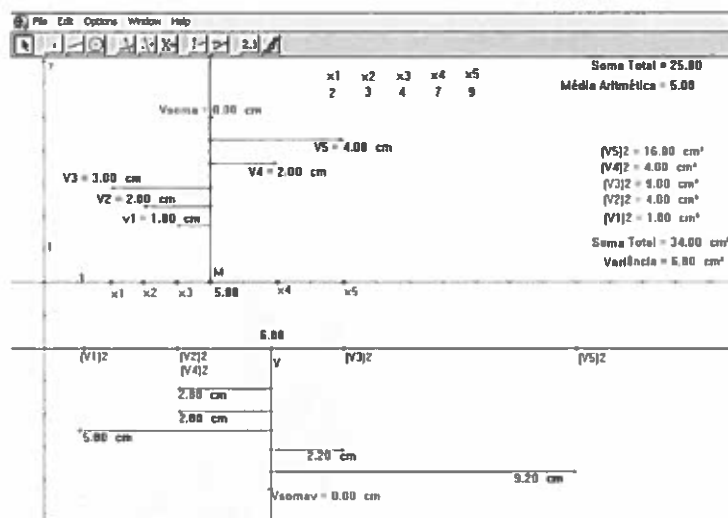


Figura 3: La varianza como una media

### 3. CONCLUSIONES

Las aplicaciones presentadas, que cualquier profesor con conocimientos mínimos de Cabri-Géomètre ó de otro software de geometría dinámica puede implementar, habrán cumplido los objetivos iniciales si, a través del potencial de la geometría dinámica, pudieran ser considerados, no sólo, como ejemplos versátiles, capaces de estimular y facilitar la asimilación, interpretación y comprensión de del concepto de dispersión, y en particular el de la varianza y de algunas de sus propiedades, sino también como elementos capaces de promover una mayor interactividad en el aula.

Otros ejemplos podrían ser mostrados, pues hay, con certeza, muchas posibilidades de explorar estas aplicaciones pudiendo profundizarlas, perfeccionarlas y/o añadirles otras potencialidades, teniendo como motivación la mejora de la enseñanza de la estadística, y en especial en lo que toca a la enseñanza de la variación estadística, bien como la curiosidad, la imaginación, la reflexión y la voluntad.

### AGRADECIMIENTOS

Trabajo apoyado por el Proyecto EDU2010-14947 (MICHIN, España), y por el Centro de Matemática de la UTAD (CM-UTAD) y por el proyecto PEst-OE/EGE/UI4056/2011 de la UDI/IPG financiado por la Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT, Portugal).

### REFERENCIAS

- Barros, P. & Fernandes, J. (2001). Dificuldades de alunos (futuros professores) em conceitos de estatística e probabilidades. In I. Lopes, J. Silva y P. Figueiredo (Orgs.), *Actas do ProfMat 2001* (pp. 197-201). Vila Real: Associação de Professores de Matemática.
- Darius, P., Michiels, S. y Raeymaekers, B. (2002). Applets for Experimenting with Statistical Concepts. In Phillips, B. (Ed.), *Proceedings of the 6th International Conference on Teaching Statistics*. Cape Town, South Africa.

Estepa, A. & Pino, J. (2013). Elementos de interés en la investigación didáctica y enseñanza de la dispersión estadística. *Números – Revista de Didáctica de las Matemáticas*. Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas, Vol. 83, pp. 43-63.

Guzmán, M. (2001). *El rincón de la pizarra – ensayos de visualización en análisis matemático – elementos básicos del análisis*. Madrid, Spain: Ediciones Pirámide.

Martins, J. & Nascimento, M. (2009), Estadística con software de Geometría, School of Mathematics of the Technological Institute of Costa Rica (Ed.) *Actas del I Encuentro de Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos (I EDEPA)*. Cartago, Costa Rica.

Shaughnessy, J. M., (1997), Missed Opportunities in Research on the Teaching and Learning of Data and Chance. In Biddulph, F. and Carr, K. (Eds.) *People in Mathematics Education*, Mathematics Education Research Group of Australia, Waikato, New Zealand, Vol. 1, pp. 177 –197.

ISBN: 84-695-8723-4